ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ.Π. Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΛ & ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σελ. 28
Α2. Ορισμός σελ. 14
Α3. Ορισμός σελ. 87
Α4. α) – Λ, **β)** – Σ, **γ)** – Λ, **δ)** – Λ, **ε)** – Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. • Είναι $P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

• Έχουμε $f'(x)=\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3},\ x\in(0,+\infty)$.

Γνωρίζουμε όμως ότι ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x στο 1 είναι $f'(1)=\frac{1}{3}$.

Άρα $P(\omega_3)=\frac{1}{3}$.

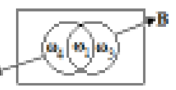
Β2.

• Είναι $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$, άρα $\{\omega_3\}\subseteq A'$
Οπότε $P(\omega_3)\le P(A')$
$\frac{1}{3}\le P(A')$

• $A\cap B\subseteq A \Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)$
$\Leftrightarrow\ P(\omega_1)\le 1-P(A')$
$\Leftrightarrow\ \frac{1}{4}\le 1-P(A')$
$\Leftrightarrow\ P(A')\le\frac{3}{4}$

Β3. • Είναι $P(A')=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 1-P(A)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow\ P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow\ \frac{1}{4}+P(\omega_4)=\frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow\ P(\omega_4)=0$

• Είναι $P(\Omega)=1\Leftrightarrow P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1$
$\Leftrightarrow\ \frac{1}{4}+P(\omega_2)+\frac{1}{3}+0=1$
$\Leftrightarrow\ P(\omega_2)=\frac{5}{12}$



• Είναι: $A-B=\{\omega_4\}$ και
$B-A=\{\omega_3\}$,

άρα $(A-B)\cup(B-A)=\{\omega_3,\omega_4\}$ και

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{3}.$$

• $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$, $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$, άρα $A'-B'=\{\omega_3\}$
$P(A'-B')=P(\omega_3)=1/3$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν c το πλάτος των κλάσεων τότε, οι 4 κλάσεις έχουν τη μορφή: $[50,50+c)$, $[50+c,50+2c)$, $[50+2c,50+3c)$, $[50+3c,50+4c)$.

Είναι: $x_4=85\ \Leftrightarrow\ \frac{50+3c+50+4c}{2}=85\ \Leftrightarrow$

$100+7c=170\ \Leftrightarrow\ 7c=70\ \Leftrightarrow\ c=10$.

Γ2. Έχουμε $\delta=75=x_3$ και $f_4=2f_3$ από την υπόθεση.

Επειδή οι παρατηρήσεις στις κλάσεις θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες έχουμε:
στην κλάση [70,80) πλάτους 10 → f_3
[75,80) πλάτους 5 → κ;

άρα $\kappa=\frac{f_3}{2}$.

Επομένως $\frac{f_3}{2}+f_4=0{,}5$ (αφού δ=75 άρα το 50% των παρατηρήσεων πάνω από δ)

$\Leftrightarrow\ \frac{f_3}{2}+2f_3=0{,}5\ \Leftrightarrow\ 5f_3=1\ \Leftrightarrow\ f_3=0{,}2$ και

$f_4=2f_3=0{,}4$.

Επιπλέον
$\bar{x}=74\ \Leftrightarrow\ x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4=74$
$\Leftrightarrow\ 55f_1+65f_2+75\cdot 0{,}2+85\cdot 0{,}4=74$
$\Leftrightarrow\ 55f_1+65f_2=25$ **(1)**

και επειδή: $f_1+f_2+f_3+f_4=1\ \Leftrightarrow\ f_1+f_2=0{,}4$ **(2)**

Από το σύστημα των **(1), (2)** προκύπτει $f_1=0{,}1$ και $f_2=0{,}3$.

Τελικά,

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές, x_i	Σχετική συχνότητα, f_i
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
Σύνολο		**1**

Γ3. Έστω $\bar{y}$ η ζητούμενη τιμή. Αν ν το μέγεθος του δείγματος, τότε μικρότερες του 80 είναι $(f_1+f_2+f_3)\nu=0{,}6\nu$ παρατηρήσεις. Έτσι, έχουμε:

$$\bar{y}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3}{0{,}6\nu}=\frac{1}{0{,}6}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3)=$$

$$=\frac{1}{0{,}6}40=\frac{200}{3}$$

Γ4. Επειδή στην κανονική κατανομή γνωρίζουμε ότι:

• το $2{,}5\%=\frac{100\%-95\%}{2}$ των παρατηρήσεων έχουν τιμή τουλάχιστον 74.

• και το $16\%=\frac{100\%-68\%}{2}$ έχουν το πολύ 68.

Έχουμε: $\bar{x}+2s=74$
$\bar{x}-s=68$

Άρα $s=2$ και $\bar{x}=70$.

Το δείγμα αυτών των παρατηρήσεων έχει $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{1}{35}<\frac{1}{10}$, άρα είναι ομοιογενές.

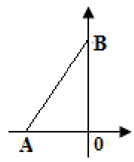
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Είναι $f'(x)=\ln x+1,\ x>0$

και (ε): $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$\Rightarrow\ y=x+\kappa-1$ η εξίσωση της εφαπτομένης.

Η (ε) τέμνει τον x΄x στο $A(1-\kappa,0)$ και τον y΄y στο $(0,\kappa-1)$. Έτσι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι:



$$E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}|1-\kappa||\kappa-1|$$

$$E=\frac{1}{2}(\kappa-1)^2.$$

Όμως $E<2\Leftrightarrow(\kappa-1)^2<4$

$\Leftrightarrow\ -1<\kappa<3$, άρα $\kappa=2$, αφού $\kappa>1$ και $\kappa\in Z$

Δ2.

α) Για $\kappa=2$ είναι (ε): $y=x+1$.

Επειδή τα σημεία (x_i,y_i) με ανήκουν στην (ε) ισχύει $y_i=x_i+1$.

Άρα, $\bar{y}=\bar{x}+1\ \Leftrightarrow\ 31=\bar{x}+1\Leftrightarrow\ \bar{x}=30$.

β) Η νέα μέση τιμή $\bar{x}_N$ των τετμημένων είναι:

$$\bar{x}_N=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i+3)+\sum_{i=21}^{35}x_i+\sum_{i=36}^{50}(x_i-\lambda)}{50}$$

$$\Leftrightarrow\ 31=\bar{x}+\frac{60-15\lambda}{50}\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3},\ \text{αφού}\ \bar{x}=30.$$

Δ3. Έχουμε $f(x)=x\ln x+2$ και

$\ln(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma})=\ln e^7$

$\Leftrightarrow\ f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=13$

Το πρόσημο της f΄ και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα:

x	**0**		**1/e**		**+∞**
f΄(x)		−	0	+	
f		↘		↗	

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[1/e,+\infty)$.

Έτσι από $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

Όμως $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0<f\left(\frac{1}{e}\right)=2-\frac{1}{e}>0$

άρα $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=2+e$

$$\bar{x}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}$$

$$=\frac{\ln(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma})+e+8}{5}=\frac{e+15}{5}.$$

Δ4. α) Έστω φ η γωνία τότε $\varepsilon\varphi\varphi>0$, αφού $0^o<\varphi<90^o$

$\Leftrightarrow\ f'(t)>0$

$\Leftrightarrow\ t>\frac{1}{e}$

άρα $A=\{t_{11},t_{12},...,t_{30}\}$, οπότε $N(A)=20$

και $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

β) Είναι $f(t)>f'(t)+1$ με $0<t\le 1$

$\Leftrightarrow\ 0<t<1$

Άρα $B=\{t_1,t_2,...,t_{29}\}$ και $A\cap B=\{t_{11},t_{12},...,t_{29}\}$.

Επομένως $P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$.