ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΕΛ. 31
Α2. ΣΕΛ. 148
Α3. ΣΕΛ. 96
Α4. α. Λ, β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Από το πολύγωνο παρατηρούμε ότι το 50% των παρατηρήσεων βρίσκεται έως 25 λεπτά άρα δ = 25

Β2.

Η διάμεσος είναι 25 άρα $F_2\% = 50\%$ άρα $\dfrac{a+4+3a-6}{7a+4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = 8$

	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Β3.
Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{10\cdot 12 + 20\cdot 18 + 30\cdot 24 + 40\cdot 6}{60} = 24$$

Η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{(10-24)^2\cdot 12 + (20-24)^2\cdot 18 + (30-24)^2\cdot 24 + (40-24)^2\cdot 6}{60} = \frac{2352 + 288 + 864 + 1536}{60} = 84$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} \cong 9{,}17$

Β4.

Στην κλάση [35,45) βρίσκεται το $f_4\% = (100-90)\% = 10\%$ των μαθητών. Άρα αναλογικά έχουμε $\frac{2}{10} = 0{,}2$ του ποσοστού, και επομένως $0{,}2 \cdot 10\% = 2\%$. Συνεπώς τουλάχιστον 37 λεπτά χρειάστηκα το $(10-2)\% = 8\%$ των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έχουμε τα ενδεχόμενα

Γ: « Ο μαθητής μαθαίνει γαλλικά» άρα $P(\Gamma) = \frac{3\nu}{\nu^2+1}$ και

Δ: « Ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά» άρα $P(\Delta) = \frac{\nu+2}{\nu^2+1}$ και $P(\Gamma \cap \Delta) = \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$.

Για το όριο έχουμε,

$$\lim_{x\to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \lim_{x\to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{2(-2)}{-4} = 1$$

Επομένως είναι $P(\Gamma \cup \Delta) = 1$.

Γ2.

Από το προσθετικό νόμο έχουμε

$$P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Gamma) + P(\Delta) - P(\Gamma \cap \Delta) \Leftrightarrow 1 = \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1} \Leftrightarrow \nu^2+1 = 3\nu+1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0$$

$\Leftrightarrow \nu = 0$ ή $\nu = 3$ δεκτή

Η λύση $\nu = 0$ απορρίπτεται διότι από υπόθεση είναι $\nu \geq 3$.

Γ3.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P((\Gamma-\Delta)\cup(\Delta-\Gamma))$.

Επειδή τα ενδεχόμενα $(\Gamma-\Delta)\cup(\Delta-\Gamma)$ είναι ασυμβίβαστα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος, οπότε είναι

$$P((\Gamma-\Delta)\cup(\Delta-\Gamma)) = P(\Gamma-\Delta) + P(\Delta-\Gamma) = P(\Gamma) - P(\Gamma\cap\Delta) + P(\Delta) - P(\Gamma\cap\Delta) =$$

$$P(\Gamma\cup\Delta) - P(\Gamma\cap\Delta) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}.$$

Γ4.

Είναι $N(\Gamma \cap \Delta) = 32$.

Επομένως σύμφωνα με το κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε
$$P(\Gamma \cap \Delta) = \frac{N(\Gamma \cap \Delta)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10} = \frac{32}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με
$f'(x) = \dfrac{-(\ln x - 1)^2}{x^2}$.

Για να βρούμε την μονοτονία της συνάρτησης λύνουμε την εξίσωση,
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-(\ln x - 1)^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -(\ln x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e .$$

Είναι $f'(x) = \dfrac{-(\ln x - 1)^2}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (0,e) \cup (e,+\infty)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ2.

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισούται με $(\text{ΟΚΛΜ}) = x \cdot f(x) = 1 + \ln^2 x$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 1 + \ln^2 x,\ \ x > 0$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$. Λύνουμε την εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ο πίνακας μεταβολής είναι,

x	0	1	$+\infty$
g′	-	0	+
g	□		□

Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 1$ το $f(1) = 1$. Επομένως το ορθογώνιο ΟΚΛΜ γίνεται ελάχιστο όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Δ3.

Είναι $\lambda = f'(1) = 1$. Επομένως η ευθεία είναι $\varepsilon : y = -x + \beta$.

Οι παρατηρήσεις του δείγματος είναι $y_i = -x_i + \beta,\ \ i = 1,2,....,10$.

Η μέση τιμή του δείγματος των παρατηρήσεων είναι $\bar{y} = -\bar{x} + \beta = \beta - 10$ και η τυπική απόκλιση $s_y = |-1| \cdot s_x = 2$.

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει $CV_y \le 01 \Leftrightarrow \dfrac{2}{|\beta - 10|} \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta - 10| \ge 20 \Leftrightarrow \beta - 10 \ge 20$ ή $\beta - 10 \le -20$ άρα $\beta \ge 30$ ή $\beta \le -10$.

Δ4.

Είναι $A \subseteq B$ άρα $P(A) \subseteq P(A \cup B)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι $f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$ (1).

Είναι επίσης $A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \le P(A \cup B)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι $f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$ (2).

Από το άθροισμα των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$$